# Modelos matemáticos en optimización y sostenibilidad

**Pedro J. Miana**
pjmiana@unizar.es

Jornada IUIs-UZ: **ODS 12: Producción y consumo responsable**
Sala de grados. Facultad de Veterinaria (Zaragoza)
12 de abril de 2023

Instituto Universitario de Investigación
de Matemáticas
y Aplicaciones
Universidad Zaragoza

## 12 PRODUCCIÓN Y CONSUMO RESPONSABLES

El consumo y la producción sostenible consisten en fomentar el uso eficiente de los recursos y la energía, la construcción de infraestructuras que no dañen el medio ambiente, la **mejora** del acceso a los servicios básicos y .... Todo ello se traduce en una **mejor** calidad de vida para todos y, además, ayuda a lograr planes generales de desarrollo, que **rebajen** costos económicos, ambientales y sociales, que **aumenten** la competitividad y que **reduzcan** la pobreza... Se trata de **crear** ganancias netas de las actividades económicas mediante la **reducción** de la utilización de los recursos, la degradación y la contaminación, logrando al mismo tiempo una mejor calidad de vida.

# El IUMA en cifras

El Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones se fundó en 2007. Cuenta con más de 80 investigadores en el ámbito de las Matemáticas y Aplicaciones en 5 Grupos de investigación del Gobierno de Aragón.

(i) Álgebra y Geometría (IP. Enrique Artal)
(ii) Física y Análisis Matemático (IP. Luis Velázquez)
(iii) Análisis Numérico, optimización y aplicaciones (IP. Herminia Calvete)
(iv) Aplicaciones de ecuaciones diferenciales (IP. Antonio Elipe)
(v) Investigación en Educación Matemática (IP. Antonio Oller)

Instituto Universitario de Investigación
de Matemáticas
y Aplicaciones
Universidad Zaragoza

Jornada sobre ECONOMÍA CIRCULAR
de los IUIs de la Universidad de Zaragoza

# Modelización matemática en el contexto de la economía circular

Carmen Galé
Departamento de Métodos Estadísticos

26 de noviembre de 2021

Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones
Universidad Zaragoza

# Optimización

**Optimizar** significa buscar la mejor manera de realizar una actividad, y en términos matemáticos, hallar el máximo o mínimo de una cierta función, definida en algún dominio. La optimización constituye un proceso para encontrar la mejor solución de un problema donde "lo mejor" se concilia con criterios establecidos previamente.

$$\begin{cases} \text{minimizar } f(x) \\ \text{sujeto a} \\ g_i(x) \le 0 \qquad i = 1, \ldots, m \\ x \in S \subset \Re^n. \end{cases}$$

# Optimización de funciones reales de variable real

En los problemas de optimización se siguen tres pasos:

1. Elección de variables. Determina las cantidades que son relevantes. A menudo, realizar un pequeño dibujo ayuda a determinar las varibles apropiadas.
2. Encontrar la función objetivo $f$ y el intervalo. Se formula el problema de optimización como una función derivable $f$ en un intervalo. Si $f$ depende de más de una varible, se buscan ecuaciones adicionales al problema, para obtener al final una función de una única variable.
3. Optimizar la función objetivo mediante la derivación.

# Optimización de funciones reales de variable real

*Diseña una lata cilíndrica de volumen 900 $cm^3$ tal que se use la menor cantidad de metal posible, considerando la caras lateral, así como la base y la tapa.¿Es posible diseñar una lata con el área de superfice máxima?*

**Solución.** El volumen de un cilindro $V = 900 = \pi r^2 h$ donde $r$ es el radio de la base y $h$ la altura del cilindro. El área de las caras del cilindro es igual a

$$A(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{900}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{1800}{r} + 2\pi r^2 = A(r)$$

Notemos $\lim_{r\to 0^+} A(r) = +\infty = \lim_{r\to +\infty} A(r)$. Por tanto no va a existir solución con área máxima. Para hallar la de área mínima, derivamos e igualamos a 0,

$$A'(r) = \frac{-1800}{r^2} + 4\pi r = 0$$

de donde concluimos $r = \left(\frac{450}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \sim 5,23cm$, y

$$h = \frac{900}{\pi \left(\frac{450}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\left(\frac{450}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r \sim 10,46cm$$

concluyendo el resultado.

# Espacios de Hilbert y métodos de los mínimos cuadrados

### Teorema

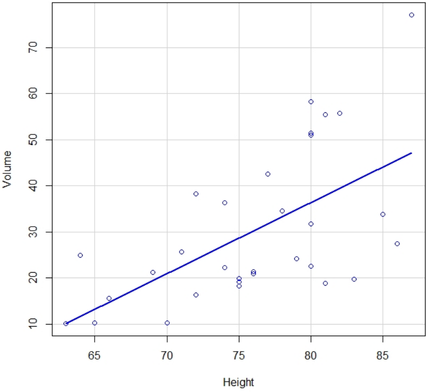
(Teorema del vector minimizante) *Sean* $(H, \langle \quad , \quad \rangle)$ *un espacio pre-Hilbert,* $\emptyset \neq S \subset H$ *con* $S$ *un subconjunto convexo y completo y* $x \in H$*. Entonces existe un único* $y_x \in S$ *tal que*

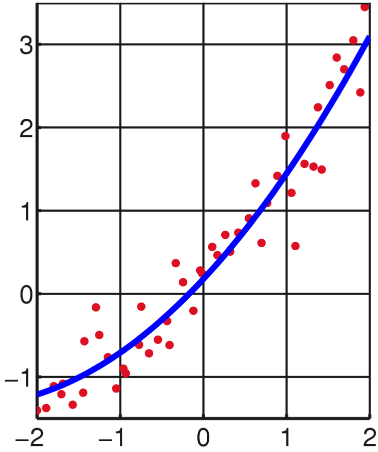
$$\|x - y_x\| = d(x, S) := \inf\{\|x - z\| \ ; \ z \in S\}.$$

*El vector* $y_x$ *se dice vector minimizante.*

# Espacios de Hilbert y métodos de los mínimos cuadrados

El método de los mínimos cuadrados se utiliza para calcular la recta de regresión lineal que minimiza las diferencias entre los valores reales y los estimados por la recta.

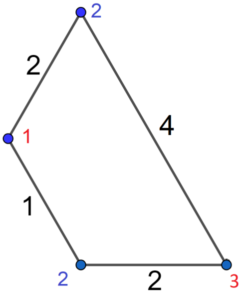


# Espacios de Lipschitz-libre

Supongamos que

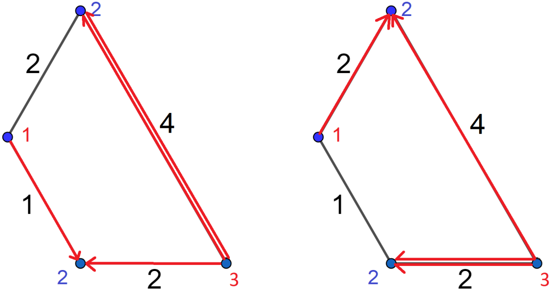
- $p_1, \ldots p_n$ son *productores* que fabrican respectivamente $a_1, \ldots, a_n$ unidades de un producto.
- $q_1, \ldots, q_m$ *consumidores* que necesitan $b_1, \ldots, b_m$ unidades del producto.
- La oferta es igual a la demanda, es decir, $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j$.
- Conocemos las distancias $d_{ij}$ que separan $p_i$ de $q_j$.



# Espacios de Lipschitz-libre

Un *plan de transporte* consiste en enviar $c_{i,j}$ unidades de $p_i$ a $q_j$ de modo que se satisfaga la oferta y la demanda ($a_i = \sum_{j=1}^{m} c_{i,j}$, $b_j = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j}$). El *coste* de dicho plan es la suma de las unidades trasladadas por la distancia recorrida,

$$C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{i,j} d_{i,j}$$




**Objetivo:** encontrar el plan de transporte *óptimo*, es decir, aquel que tiene el menor coste.

# Espacios de Lipschitz-libre

## Teorema de dualidad de Kantorovich-Rubenstein, 1958

El coste óptimo del problema de transporte concide con

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i f(p_i) - \sum_{j=1}^{m} b_j f(q_j) : Lip(f) \leq 1 \right\}$$

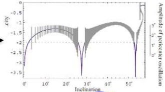
Este resultado establece una relación entre el estudio de planes de transporte y el estudio de funciones Lipschitz (es decir, con pendientes $\leq 1$), lo que permite abordar el problema con técnicas de análisis.
Recíprocamente, permite estudiar las funciones Lipschitz desde un nuevo punto de vista, conocido como espacio *Lipschitz-libre*. Este es uno de los trending topics del Análisis Funcional actual por sus aplicaciones en el estudio de la estructura no-lineal de espacios de Banach y en teoría de la computación.
Se puede dar enunciar un problema parecido en el contexto de distribuciones continuas, buscando un modo óptimo de transformar una distribución de probabilidad $\mu$ en otra $\nu$. Su coste se conoce como *distancia de Wassestein-1* entre $\mu$ y $\nu$.

# Mecánica Celeste

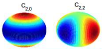
Instituto Universitario de Investigación
de Matemáticas
y Aplicaciones
Universidad Zaragoza

Actividades de **investigación** en el sector **ESPACIO**

**Cálculo orbital** → **Teorías analíticas para el movimiento de satélites artificiales** →

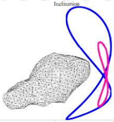



**Órbitas congeladas en la Luna**



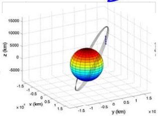

**Aplicación a velas solares en Mercurio**

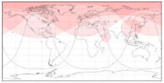
**Modelado matemático de cuerpos celestes de forma irregular** →



**Dinámica alrededor de asteroides**

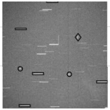
**Constelaciones de satélites** → **Teorías matemáticas para la distribución de satélites en órbita** →



**Diseño de constelaciones para observación de la Tierra**

**Determinación orbital** → **Tratamiento de imágenes astrométricas** →



**Catalogación de basura espacial**

# Otras técnicas en optimización

(i) Teoría de juegos, equilibrio de Nash.

(ii) Programación lineal y no lineal

(iii) Teoremas de punto fijos: de Banach, de Brouwer...

(iv) Resolución de ecuaciones no lineales: método de Newton; de Kantorovich...

(v) Ecuaciones integro-diferenciales y en diferencias finitas

(vi) Cálculo y ecuaciones diferenciales fraccionarias

factoria!
ASINTOTAS
SUBindice
MATRIZ

# MUCHAS GRACIAS

## Pedro J. Miana, IUMA-UZ

ÍRCULO
CONVEXIDAD
VECTORES
det nte
ina erm
CONCAVIDAD

GRAFFITIS MATEMATICOS: Antonio Ledesma López

# Index